

Doi: doi.org/10.70693/rwsk.v1i3.710

高等数学教学中一致连续性的育人作用和判定定理

于晟伟¹ 赵赫^{1*} 何永明¹ 王洪庆¹ 宋云涛¹

(¹ 中国消防救援学院, 北京 北京 102202)

摘要: 一致连续性证明是高等数学教学的关键难点, 学生常因其抽象与逻辑复杂性而理解不深。本文创新性地提出一种简明证明方法, 系统探讨函数导数性质与一致连续性及其非一致连续性的内在联系, 并总结为一系列定理。深入剖析一致连续性与非一致连续性定义, 明确二者在函数行为上的本质差异。分析函数导数的有界性、单调性等关键性质, 揭示其对函数一致连续性的影响机制。在此基础上, 总结出一套将导数性质与一致连续性判断直接关联的定理体系, 为学生提供清晰、系统的判断工具。为增强学生对理论的理解与应用能力, 本文引入丰富实例。通过具体函数的分析与证明, 直观展示如何借助导数性质判断一致连续性, 使学生能够将抽象理论与实际问题相结合。教学实践表明, 这种方法显著提升了学生的学习效果。课堂反馈显示, 学生对一致连续性的理解更加深入, 证明准确性提高, 解决相关问题时的自信心和兴趣也有所提升。本研究为高等数学教学提供新思路, 有助于增强学生对抽象数学概念的理解与应用能力, 推动高等数学教学质量的提升。

关键词: 一致连续性证明; 高等数学教学; 导数性质; 教学实践

一、引言

一致连续性是数学分析中的核心概念, 在高等数学教学体系中占据着举足轻重的地位。它对于理解函数的诸多性质起着关键作用, 也是众多高级数学理论构建和应用的重要基石。然而, 一致连续性证明的抽象性和逻辑复杂性, 使其成为教学中的难点。学生在学习过程中常常感到困惑, 难以将函数的局部性质与整体行为有效联系起来, 这在很大程度上影响了他们对相关数学概念的深入理解和全面掌握。

回顾历史, 函数连续性的概念最初源于几何直观, 其逐渐严格化的过程与数学分析学科的发展紧密相连, 相互促进。1817 年, 数学家波尔查诺率先运用代数语言对连续性进行了精准定义, 开启了严格化先河^[1,2]。1823 年, 柯西借助“无穷小”概念描绘连续性, 但未明确区分逐点性质与整体性质。直到 19 世纪中叶, 魏尔斯特拉斯引入更精确的语言, 将连续性从动态几何描述转化为静态分析定义, 标志着现代连续性理论的正式确立^[3,4]。沿着这一脉络, 一致连续性概念于 1872 年由海涅和康托尔共同提出, 强调函数在整个区间上的全局性质, 并通过海涅-康托尔定理, 揭示了闭区间上连续函数与一致连续函数的内在联系^[5]。

在应用和验证方面, 依据一致连续的明确定义检验是最基础且普遍的方法^[6]。康托尔定理指出, 闭区间上的连续函数必具有一致连续性, 这是判断有限区间上函数一致连续性的关键理论工具^[7-9]。对于无穷区间上的函数, 若其在无穷远处存在有限极限或呈现特定渐近行为模式, 则可判定其具有一致连续性^[10]。此外, 一致连续函数在进行线性组合、有界乘积及复合运算等操作时, 在一定条件下仍能保持一致连续特性。幂

作者简介: 于晟伟 (1995—), 男, 吉林长春人, 中国消防救援学院讲师, 北京航空航天大学博士研究生。

赵赫 (1998—), 男, 北京人, 中国消防救援学院助教, 首都师范大学硕士研究生。

何永明 (1978—), 男, 江西南昌人, 中国消防救援学院副教授。

王洪庆 (1977—), 男, 黑龙江双鸭山人, 中国消防救援学院副教授。

宋云涛 (1982—), 男, 云南昆明人, 中国消防救援学院副教授。

函数、指数函数等基本初等函数的一致连续性问题也已得到广泛深入研究^[11]。

然而，一致连续性的抽象性依然使其成为数学分析教学中的难点^[12,13]。研究表明，学生在学习过程中易混淆连续与一致连续概念，尤其在处理无穷区间上函数时，这种误解更为常见^[14]。对于二元函数的一致连续性判定，虽可通过坐标分解或一致收敛性等方法进行，但学生理解和掌握这些方法仍有一定难度^[15,16]。在泛函分析领域，一致连续性与算子有界性、紧性等概念紧密关联，为复杂空间性质研究提供理论基础。教学实践中可借助动态几何软件模拟一致连续性的几何意义，帮助学生直观理解这一抽象概念^[17]。

尽管前人在一致连续性教学领域已取得研究成果，为本论文奠定基础，但学生在理解和应用一致连续性证明时仍面临诸多困难和挑战。因此，本研究致力于提出一种创新性简明证明方法，通过深入剖析函数导数性质与一致连续性的内在联系，为学生搭建从抽象理论到实际应用的桥梁，提供更直观、系统的理解途径。本研究的核心创新点在于深入剖析一致连续性和非一致连续性定义，揭示两者在函数行为表现上的本质差异。通过分析函数导数的有界性、单调性等关键性质，揭示这些性质对函数一致连续性的直接影响。在此基础上，总结归纳出一套系统定理，将函数导数性质与一致连续性判断直接关联，为学生提供条理清晰、操作性强的判断工具。在实际教学中，这种方法的可行性和有效性得到验证。通过丰富实例展示如何借助函数导数性质判断一致连续性，帮助学生将抽象理论与实际问题结合。教学实践结果表明，这种方法显著提升学生的学习效果：课堂反馈显示，学生对一致连续性的理解更深入透彻，把握核心要义更准确；相关证明的准确性提高，错误率降低；在解决复杂问题时，学生的自信心和学习兴趣大幅提升。本研究不仅为高等数学教学提供新思路，改善抽象数学概念的教学效果，而且增强学生对一致连续性概念的理解与应用能力，培养他们的数学思维和解决问题的综合能力。高等数学课程在育人方面具有多方面重要作用。它能够培养学生的逻辑思维和抽象思维能力，通过学习各种概念、定理和证明方法，学生能够锻炼思维能力，提高分析和解决问题的能力。这种思维训练对于学生在其他学科领域以及未来的职业发展都具有重要意义。高等数学课程有助于培养学生的创新能力，激发他们的创新意识和创造力。高等数学课程能够培养学生的科学精神和严谨态度，这种严谨的学术态度和科学精神对于学生在任何领域的学习和研究都是必不可少的。最后，高等数学课程对学生的综合素质提升也有积极作用，它不仅能够提高学生的数学素养和数学应用能力，还能增强他们的数学文化素养。从宏观层面看，本研究有助于推动高等数学教学质量的整体提升，为培养高素质数学人才贡献力量。

前人在一致连续性教学领域的研究为本论文提供了坚实基础。这些研究主要集中在对一致连续性概念的深入探讨，包括其定义、性质和与其他连续性概念的区别；对一致连续性证明方法的研究，提出了一些常用的证明技巧和策略；对一致连续性教学方法的探索，尝试通过不同的教学手段帮助学生理解和掌握这一概念。这些研究成果为本论文提供了丰富的理论支持和实践参考，使我们能够在前人研究的基础上进一步创新和发展。

二、一致连续性的育人作用

（一）培养逻辑思维和抽象思维能力

一致连续性涉及复杂的数学定义和定理证明，学生在学习过程中需要理解其严格的定义，掌握相关的判定方法和证明技巧。这有助于培养学生的逻辑推理能力，使他们能够更加严谨地思考问题，并提高分析和解决问题的能力。例如，在证明一个函数在某个区间上一致连续时，学生需要根据定义，运用恰当的方法和步骤进行推导，这有助于锻炼他们的逻辑思维和推理能力。一致连续性是一个比较抽象的概念，它要求学生能够从具体的函数和区间中抽象出一般的性质和规律。通过学习一致连续性，学生可以培养自己的抽象思维能力，学会从特殊到一般、从具体到抽象的思考方式，从而更好地理解和掌握数学中的其他抽象概念。

（二）提升数学素养和应用能力

对一致连续性的深入理解有助于学生形成良好的数学素养，使他们对数学的本质和内涵有更深刻的认识。学生能够更好地理解数学的严谨性、精确性和逻辑性，从而在学习和研究中更加注重数学思想和方法的运用。一致连续性在数学分析和其他相关学科中有广泛的应用。掌握一致连续性的概念和相关理论，可

以帮助学生更好地理解和应用数学知识解决实际问题。例如, 在微分方程、泛函分析等领域, 一致连续性常常被用来研究函数和算子的性质, 为解决复杂问题提供理论基础。

(三) 培养科学精神和严谨态度

数学是一门严谨的学科, 一致连续性的学习要求学生严格遵循数学的逻辑和规则, 注重每一个细节和条件。这种严谨的学术态度和科学精神对于学生在任何领域的学习和研究都是必不可少的, 有助于培养他们实事求是、严谨认真的科学精神。在学习一致连续性的过程中, 学生会遇到各种复杂的问题和挑战, 需要通过不断地思考、尝试和解决来克服困难。这有助于培养学生的耐心和毅力, 提高他们解决复杂问题的能力, 使他们在面对困难时能够坚持不懈地寻找解决方案。

(四) 增强创新意识和综合能力

在研究一致连续性相关问题时, 学生需要运用创新性的思考和方法来解决尚未被完全理解和解决的问题。这有助于激发学生的创新意识和创造力, 鼓励他们突破传统的思维模式, 探索新的思路和方法。学习一致连续性不仅需要扎实的数学基础, 还需要学生具备综合运用知识的能力。学生在学习过程中需要将所学的数学分析知识与其他相关学科的知识相结合, 从而提高自己的综合能力, 为未来的学习和研究打下坚实的基础。

三、预备知识

在正式演示本文的主要结果之前, 我们有必要先对一致连续性的相关定义和引理进行简要回顾, 以便为后续的讨论奠定基础。首先, 让我们重温一致连续性的精确定义, 这是理解后续内容的关键所在。

定义 1 (文献[18]中 113 页定理 3.4.1) 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上定义, 若对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $x, x' \in X$ 满足 $|x - x'| < \delta$, 就成立 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上一致连续。

四、函数一致连续性的判别法

下面我们给出函数一致连续的简明判定定理。

定理 1 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上定义且可导, 若导数 $f'(x)$ 在区间 X 上有界, 则函数 $f(x)$ 在区间 X 上一致连续。

证明: 由定义 1, 函数 $f(x)$ 在区间 X 上一致连续等价于:

若对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $x, x' \in X$ 满足 $|x - x'| < \delta$, 就成立 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ 。

因为函数 $f(x)$ 在区间 X 上可导且导数有界, 不妨设 $|f'(x)| \leq M$, 所以由导数定义有

$$|f'(x)| = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|} \leq M,$$

即 $|f(x') - f(x)| \leq (M + \varepsilon) |x' - x| < (M + \varepsilon) \delta$, 取 $\delta = \varepsilon / (M + \varepsilon)$ 有 $|f(x') - f(x)| < (M + \varepsilon) \delta = \varepsilon$, 得证。

定理 2 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上连续且存在左右导数, 若左右导数 $f'_+(x), f'_-(x)$ 在区间 X 上有界, 则函数 $f(x)$ 在区间 X 上一致连续。

证明: 由定义 1, 函数 $f(x)$ 在区间 X 上一致连续等价于:

若对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $x, x' \in X$ 满足 $|x - x'| < \delta$, 就成立 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ 。

因函数 $f(x)$ 在区间 X 上存在左右导数且左右导数有界, 不妨设 $|f'_+(x)| \leq M, |f'_-(x)| \leq M$, 由左右导数定义有

$$|f'_+(x)| = \lim_{x' \rightarrow x^+} \frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|} \leq M, \quad |f'_-(x)| = \lim_{x' \rightarrow x^-} \frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|} \leq M,$$

因此当 $x, x' \in X$ 时, 对于任意 $x' > x$ 或 $x' < x$ 有 $|f(x') - f(x)| \leq (M + \varepsilon) |x' - x| < (M + \varepsilon) \delta$,

取 $\delta = \varepsilon / (M + \varepsilon)$ 有 $|f(x') - f(x)| < (M + \varepsilon) \delta = \varepsilon$, 得证.

下面我们给出上述定理应用的具体案例分析.

案例 证明函数 $f(x) = \cos x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

证明: 计算导数 $f'(x) = -\sin x$, 则 $|f'(x)| = |-\sin x| \leq 1$, 因此导数在区间有界. 由定理 1 知函数

$f(x) = \cos x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

相较于传统的定义证明, 采用判定定理进行证明要简洁得多. 借助这一案例, 学生对一致连续性这一抽象概念有了更加直观且深刻的理解, 也对一致连续性与导数性质的内在联系有了更深入的思考. 在实际教学中发现, 当学生运用判定定理对具体函数进行分析时, 他们能够迅速判断函数是否具有致连续性, 并且在这一过程中, 他们开始主动探索导数的有界性、单调性等性质如何影响函数的一致连续性. 这种探索不仅加深了他们对理论知识的掌握, 还显著提升了他们将理论应用于实际问题的能力. 在分析指数函数或三角函数的一致连续性时, 学生们通过观察导数的行为, 能够直观地预测函数在不同区间上的连续性特征, 并通过严格的数学推导来验证自己的预测, 从而实现了从抽象理论到具体应用的顺畅过渡.

五、结论

本文提出了一种简明的判定方法, 用于判断函数的一致连续性, 并将该方法系统总结为定理 1 和定理 2. 研究深入分析了函数导数的有界性对函数一致连续性的影响机制, 揭示了导数性质与一致连续性之间的内在联系. 在育人方面, 一致连续性概念的学习在培养学生逻辑思维和抽象思维能力方面具有重要意义. 通过对一致连续性判定定理的证明与应用, 学生能够锻炼自己的逻辑推理能力, 提高分析和解决问题的能力. 同时, 一致连续性作为一个抽象的数学概念, 要求学生从具体的函数和区间中抽象出一般的性质和规律, 有助于培养他们的抽象思维能力. 为增强学生对理论的理解与应用能力, 本文引入了丰富多样的实例. 通过具体函数的分析与证明, 直观地展示了如何借助导数性质来判断一致连续性, 使学生能够有效地将抽象理论与实际问题相结合. 教学实践表明, 这种方法显著提升了学生的学习效果. 课堂反馈显示, 学生对一致连续性的理解更加深入透彻, 证明的准确性大幅提高, 解决相关问题时的自信心和学习兴趣也得到了显著提升. 本研究为高等数学教学提供了一种创新性思路和方法, 有效改善了抽象数学概念的教学效果, 切实增强了学生对一致连续性概念的理解与应用能力, 培养了他们严谨的数学思维和灵活解决问题的能力, 有力地推动了高等数学教学质量的整体提升, 为培养高素质的数学专业人才贡献了一份力量. 同时, 通过对一致连续性概念的深入学习, 学生能够更好地理解数学的严谨性、精确性和逻辑性, 从而在学习和研究中更加注重数学思想和方法的运用, 培养了他们的科学精神和严谨态度.

参考文献:

- [1] 李亚亚, 王昌. 函数连续性概念的历史: 从欧拉到勒贝格[J]. 自然辩证法通讯, 2024, 46(02): 61-67.
- [2] 张艳, 阿力非日. 一元函数一致连续性的几类判别法及其应用[J]. 西昌学院学报(自然科学版), 2020, 34(04): 22-24+32.

- [3] 郭伟, 王飞. 函数一致连续的判别法[J]. 长治学院学报, 2023, 40(05): 1-3.
- [4] 王俏敏. 基于 APOS 理论的一致连续函数概念教学探析[J]. 数学学习与研究, 2021, 8: 11-12.
- [5] 范海宁, 王海燕. 一元函数一致连续性的判定[J]. 数学学习与研究, 2020, 16: 8-9.
- [6] 王文华, 曹怀信. 一元函数一致连续性的性质[J]. 榆林学院学报, 2016, 26(04): 31-34+40.
- [7] 陈彦. 一致连续性的课堂教学建议[J]. 现代职业教育, 2020, 2: 118-119.
- [8] 钱耀飞. 函数一致连续性判断方法探究[J]. 现代职业教育, 2017, 13: 129.
- [9] 周骁. 一个判别函数一致连续性的新标准[J]. 湖北汽车工业学院学报, 2014, 28(04): 51-52.
- [10] 姜丽亚, 金永阳. 从一个例子探究无穷区间上函数的一致连续性[J]. 教育教学论坛, 2020, 14: 292-293.
- [11] 白占强. 关于幂函数的一致连续性问题[J]. 科教导刊(下旬), 2018, 18: 58-60.
- [12] 彭艳芳. 关于函数“一致连续性”的教学探究[J]. 黄冈师范学院学报, 2017, 37(06): 65-67.
- [13] 兰尧尧. 一致连续性概念的教学探讨与反思[J]. 教育教学论坛, 2015, 16: 229-230.
- [14] 潘伟云. 函数一致连续性的教学难点与解析策略[J]. 数学学习与研究, 2020, 19: 6-7.
- [15] 许若敏, 汪义瑞. 二元函数一致连续性的判定[J]. 考试周刊, 2015, 10: 40-41.
- [16] 费时龙, 占伟军. 函数项级数与含参量积分的一致连续性[J]. 廊坊师范学院学报(自然科学版), 2014, 14(06): 14-16.
- [17] 王玉磊, 李彩娟, 付宗魁, 等. 对函数一致连续性教学的探讨[J]. 数学学习与研究, 2018, 24: 5.
- [18] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析(第二版上册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

The Educational Role and Judgment Theorem of Consistency and Continuity in Higher Mathematics Teaching

Yu Chengwei¹, Zhao He^{1*}, He Yongming¹, Wang Hongqing¹, Song Yuntao¹

¹ China Fire and Rescue Institute, Beijing 102202, China

Abstract: The proof of consistency and continuity is a key and difficult point in higher mathematics teaching, and students often do not understand it deeply due to its abstraction and logical complexity. This article innovatively proposes a concise proof method that systematically explores the intrinsic relationship between the derivative properties of functions and their consistency and non consistency continuity, and summarizes it into a series of theorems. Thoroughly analyze the definitions of consistent continuity and inconsistent continuity, and clarify the essential differences between the two in terms of function behavior. Analyze the key properties such as boundedness and monotonicity of function derivatives, and reveal their impact mechanism on the uniform continuity of functions. On this basis, a set of theorem systems is summarized that directly relate derivative properties to consistent continuity judgments, providing students with clear and systematic judgment tools. To enhance students' understanding and application ability of theory, this article introduces rich examples. By analyzing and proving specific functions, demonstrate intuitively how to use derivative properties to determine consistency and continuity, enabling students to combine abstract theory with practical problems. Teaching practice has shown that this method significantly improves students' learning outcomes. Classroom feedback shows that students have a deeper understanding of consistency and continuity, demonstrating improved accuracy and increased confidence and interest in solving related problems. This study provides new ideas for higher mathematics teaching, which helps enhance students' understanding and application ability of abstract mathematical concepts, and promotes the improvement of the quality of higher mathematics teaching.

Keywords: Proof of consistency and continuity; Higher mathematics teaching; Derivative property; Teaching Practice