水平转动弦面内微振动引起的张力修正

周家卉[1] 石宇畅[1] 胡怡[1]

(1.杭州师范大学物理学院，杭州 311121)

摘 要：由水平转动弦的轴向力平衡和自由端条件出发，导出面内横向速度引起的动态张力修正。指出该修正虽然与科里奥利项直接相关，但其与横向斜率的乘积属于二阶小量，因此不改变一阶近似下的横向振动频率。对最低非零面内 Legendre 模态，得到张力修正的显式表达式，分析其空间变号、固定端反力振荡以及保持非负张力的振幅条件。结果可用于说明转动参考系中各项近似阶数的区别。

关键词：转动弦；科里奥利力；动态张力；Legendre 模态；小振幅近似

DOI：doi.org/10.70693/202610305172

Tension Correction Induced by In-Plane Small Vibrations of a Horizontally Rotating String

Jiahui Zhou, Yuchang Shi, Yi Hu

Hangzhou Normal University, Hangzhou, China

Abstract: Starting from the axial force balance and the free-end condition of a horizontally rotating string, we derive the dynamic tension correction induced by in-plane transverse velocity. Although directly related to the Coriolis term, its product with the transverse slope is second order, so the first-order transverse frequencies remain unchanged. An explicit tension correction is obtained for the lowest nonzero in-plane Legendre mode. Its spatial sign change, oscillation of the fixed-end reaction, and the amplitude condition for nonnegative tension are analyzed. The example clarifies perturbation orders in a rotating frame.

Keywords: rotating string; Coriolis force; dynamic tension; Legendre modes; small-amplitude approximation

作者简介：周家卉(2005—)，女，本科；
石宇畅(2005—)，女，本科；
胡怡(2006—)，女，本科。

1 引言

转动弦的微振动同时涉及变张力、离心力和科里奥利力，是理论力学和数学物理方法教学中的典型问题。林琼桂从第一原理讨论了两种转动弦的波动方程, 并明确保留了科里奥利加速度[1]。Stevenson 指出, 转动参考系中面内与面外横向振动的方程并不相同[2]；McDonald 给出了不可伸长转动弦的 Legendre 模态解[3]。Noël 等进一步研究了竖直悬挂转动负载柔索的构型和频率[4]。转动参考系中的加速度分解可参见文献[5]。

在水平转动、忽略重力的情形下，面内横向速度会进入轴向力平衡，因此张力一般不再是平衡时的静态分布。一个值得单独澄清的问题是：这种速度诱导的张力修正是否会进一步改变横向振动频率？本文只讨论这一具体问题。先由轴向方程和自由端条件求出动态张力，再分析各阶小量在横向方程中的作用，最后以最低非零面内模态给出显式结果和非负张力条件。

2 动态张力的一般表达式

记弦长为 l、线质量密度为 ρ，转动角速度为 ω。u(x, t) 和 v(x, t) 分别表示面内、面外横向位移，$F_T(x, t)$ 为标量张力。所讨论的方程为

$$2\rho\omega u_t + F_{T,x} + \rho\omega^2 x = 0 \tag{1}$$

$$\rho u_{tt} - (F_T u_x)_x - \rho\omega^2 u = 0 \tag{2}$$

$$\rho v_{tt} - (F_T v_x)_x = 0 \tag{3}$$

自由端条件为

$$F_T(l, t) = 0 \tag{4}$$

式 (1) 中的 $2\rho\omega u_t$ 来自科里奥利加速度。将该式对 x 积分，并利用式 (4)，立即得到

$$F_T(x, t) = F_0(x) + F_1(x, t) \tag{5}$$

其中

$$F_0(x) = \frac{1}{2}\rho\omega^2(l^2 - x^2) \tag{6}$$

$$F_1(x, t) = 2\rho\omega\int_x^l u_t(s, t)\,ds \tag{7}$$

F_0 是直线平衡状态下的张力，F_1 则是面内横向速度引起的修正。式 (7) 不依赖面外位移 v，所以纯面外振动不会产生这一类张力修正。

3 一阶近似下横向频率为何不变

在小振幅条件下，u、v 及其时间导数均为一阶小量。由式 (7) 可知 F_1 也是一阶小量。因此，在式 (2) 和式 (3) 中，

$$F_1 u_x = O(2), \qquad F_1 v_x = O(2) \tag{8}$$

若只保留一阶项，横向方程中的张力均应取 F_0，而不能因为 F_1 是一阶小量，就把 $F_1 u_x$ 也误当作一阶项。

引入无量纲变量

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \omega t, \quad (U, V) = \frac{(u, v)}{l}$$
$$\mathcal{T} = \frac{F_T}{\rho\omega^2 l^2} \tag{9}$$

则一阶横向方程为

$$U_{\tau\tau} - U = (\mathcal{T}_0 U_\xi)_\xi \tag{10}$$

$$V_{\tau\tau} = (\mathcal{T}_0 V_\xi)_\xi \tag{11}$$

其中 $\mathcal{T}_0 = (1 - \xi^2)/2$。两式的正则解均为奇阶 Legendre 多项式 $P_{2n-1}(\xi)$，相应无量纲频率为

$$\sigma_n^2 = (n - 1)(2n + 1), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

$$\omega_n^2 = n(2n - 1), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

因此，科里奥利项可以在一阶轴向力平衡中产生动态张力，却不改变一阶横向模态和频率。这里并不矛盾：前者只涉及一个一阶量 U_τ，后者则涉及两个一阶量的乘积。

4 最低非零面内模态的显式修正

面内最低模态 $P_1(\xi) = \xi$ 的频率为零，对应静态倾斜。取最低非零面内模态

$$U(\xi, \tau) = AP_3(\xi)\cos(\sigma\tau), \qquad \sigma = \sqrt{5} \tag{14}$$

其中 A 为无量纲振幅。由式 (7) 的无量纲形式

$$\mathcal{T}_1 = 2\int_\xi^1 U_\tau(s, \tau)\,ds \tag{15}$$

以及

$$\int_{\xi}^{1} P_3(s)\,ds = -\frac{1}{8}(1-\xi^2)(1-5\xi^2) \tag{16}$$

可得

$$\mathcal{T} = \frac{1-\xi^2}{2} + \frac{A\sqrt{5}}{4}(1-\xi^2)(1 - 5\xi^2)\sin(\sqrt{5}\tau) \tag{17}$$

式 (17) 表明, 张力修正以横向振动频率作周期性变化, 并在 $\xi = 1/\sqrt{5}$ 处改变空间符号。自由端始终满足 $\mathcal{T}_1(1, \tau) = 0$; 固定端则有

$$\mathcal{T}_1(0,\tau) = \frac{A\sqrt{5}}{4}\sin(\sqrt{5}\tau) \tag{18}$$

说明固定端反力也会随时间振荡。数值积分对式 (17) 的检验误差不超过 1.2×10^{-16}。

图 1 给出了 A = 0.02 时的结果。此时最大横向斜率为 6A = 0.12, 符合小斜率近似。右图将修正项除以 A, 以便清楚显示其空间结构。

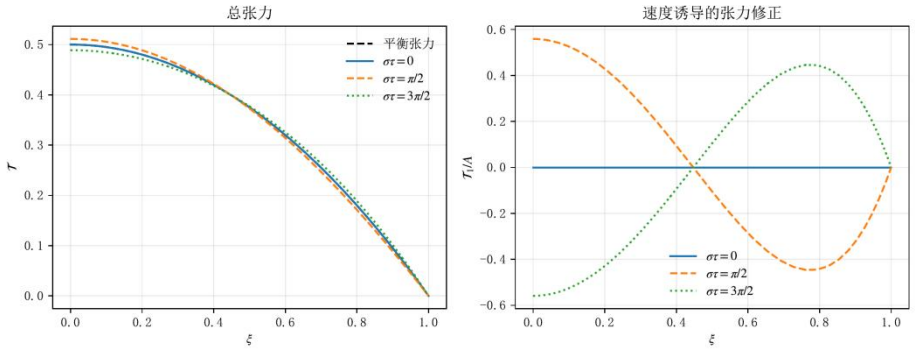


图 1 最低非零面内模态的总张力和速度诱导修正。左图为总张力, 右图为按振幅 A 归一化的修正项。修正项在 $\xi = 1/\sqrt{5}$ 处变号, 并在自由端始终为零。

5 非负张力条件及适用范围

张力为负通常意味着柔弦松弛, 已超出本文模型。因此, 可以利用式 (17) 检查振幅适用范围。将其写成

$$\mathcal{T} = (1-\xi^2)\left[\frac{1}{2} + \frac{B}{4}(1-5\xi^2)\right], \quad B = A\sqrt{5}\sin(\sqrt{5}\tau) \tag{19}$$

当 B > 0 时, 方括号内的最小值出现在自由端附近, 为 1/2 − B。故全周期保持非负张力的条件为

$$A\sqrt{5} \le \frac{1}{2}, \quad A \le \frac{1}{2\sqrt{5}} \approx 0.2236 \tag{20}$$

当 B < 0 时, 最不利位置转为固定端, 所得限制较弱, 不影响上述全周期判据。

图 2 验证了这一判别条件。当 A 超过临界值后, 自由端附近在一个振动周期的部分时段出现负张力。需要强调的是, 式 (20) 只是“张力非负”的数学条件, 并不意味着接近该值的振幅仍满足小振幅近似。实际教学计算还应要求 A 及横向斜率足够小; 否则, 被舍去的 $F_1 u_x$ 等二阶项也需要重新考虑。

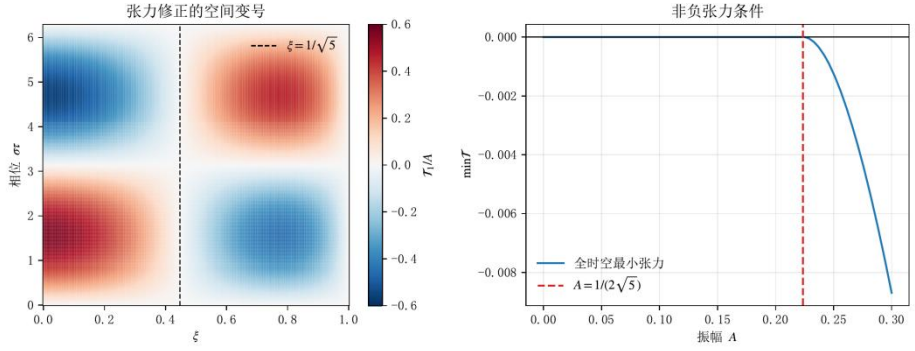


图 2 张力修正的时空分布与振幅条件。左图显示修正项的空间变号和周期性; 右图显示全时空最小张力随振幅的变化, 虚线为式 (20) 给出的临界值。

6 结论

由式 (1) 和自由端条件可直接得到速度诱导的动态张力。它与横向斜率的乘积为二阶小量，所以一阶横向振动仍由平衡张力决定，Legendre 模态和频率不变。最低非零面内模态的张力修正具有显式多项式形式，在 $\xi = 1/\sqrt{5}$ 处变号，并使固定端反力周期振荡。全周期非负张力要求 $A \leq 1/(2\sqrt{5})$。该例说明，在转动参考系中分析“某项是否重要”时，应同时考察其物理来源和近似阶数。

参考文献

[1] 林琼桂. 关于转动弦的波动方程[J]. 大学物理, 2008, 27(2): 7 – 9.

[2] STEVENSON A C. A note on the vibrations of a rotating rope[J]. Philosophical Magazine, 1937, 24(160): 293 – 299. DOI: 10.1080/14786443708565125.

[3] MCDONALD K T. Transverse waves on an inelastic rotating string[EB/OL]. (1980 – 12 – 01). https://kirkmcd.princeton.edu/examples/rotating_string.pdf.

[4] NOËL J M, NIQUETTE C, LOCKRIDGE S, et al. Natural configurations and normal frequencies of a vertically suspended, spinning, loaded cable with both extremities pinned[J]. European Journal of Physics, 2008, 29(5): N47 – N53. DOI: 10.1088/0143-0807/29/5/N02.

[5] GOLDSTEIN H, POOLE C, SAFKO J. Classical Mechanics[M]. 3rd ed. San Francisco: Addison Wesley, 2002.